SESSION 2001

Concours d'admission en première année du Cycle de Formation d'Architectes de l'École Nationale Supérieure des Arts et Industries de Strasbourg

Épreuves écrites

MATHÉMATIQUES - EXERCICES

Durée : 4 heures - Coefficient : 4

Note : cette épreuve comprend quatre exercices que l'on pourra traiter dans l'ordre de son choix.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE I

On se place dans le plan affine euclidien orienté. On rappelle que l'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection des hauteurs du triangle et que le centre du cercle circonscrit au triangle est le point d'intersection des médiatrices des côtés du triangle.

1° Soit ABC un triangle, H son orthocentre.
La hauteur issue du sommet A rencontre le cercle circonscrit au triangle en un point A_1 distinct du point A.

Montrer que les angles $(\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH})$ sont égaux modulo π.

2° En déduire que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit au triangle.

3° Montrer qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans un cercle donné et ayant pour orthocentre un point donné H intérieur à ce cercle.

EXERCICE 2

Rappel : soient a et b deux entiers relatifs et m un entier naturel non nul.
On dit que a est congru à b modulo m si $a-b$ est divisible par m.

1° Pour tout réel A, $A>0$, pour tout entier n, $n\geq 0$, on pose : $I_n(A)=\int_0^A e^{-x}x^n dx$.

a) Calculer $I_0(A)$.

b) Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n+1}(A)$ et $I_n(A)$.

c) En déduire que pour tout n, $I_n(A)$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{A\to+\infty} I_n(A)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx$. Calculer cette limite pour tout n.

Pour tout polynôme $R=\sum_{k=0}^{q} r_k \mathrm{X}^k$, à coefficients réels, de degré q, $q\in\mathbb{N}$, on définit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}R(x)\,dx=\sum_{k=0}^{q} r_k \int_0^{+\infty} e^{-x}x^k dx.$$

Et pour tout réel b, $b>0$, on définit :

$$\int_b^{+\infty} e^{-x}R(x)\,dx=\int_0^{+\infty} e^{-x}R(x)\,dx-\int_0^{b} e^{-x}R(x)\,dx.$$

2° Soit $P=\sum_{k=0}^{q} a_k \mathrm{X}^k$ un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré q, $q\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que : $\int_0^{+\infty} e^{-x}P(x)dx=\sum_{k=0}^{q} a_k k!$.

b) En déduire que : $\forall m\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^m P(x)dx$ est congru à $P(0)\times m!$ modulo $(m+1)!$.

c) On suppose qu'il existe deux entiers k et m, $k\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}^*$, et un polynôme Q à coefficients entiers relatifs, tels que :

$$P=(\mathrm{X}-k)^m Q, \text{ avec } Q(k)\neq 0.$$

Montrer que : $e^k\times\int_k^{+\infty} e^{-x}P(x)dx$ est divisible par $m!$

3° Soient q et m deux entiers, $q\geq 1$, $m\geq 2$ et $q+1$ entiers relatifs $a_0,a_1,...,a_q$.

On note $e=\exp(1)$ et l'on considère le réel $a_0+a_1e+a_2e^2+...+a_qe^q$. On pose :

$$A_m=(a_0+a_1e+...+a_qe^q)\times\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}[(x-1)(x-2)...(x-q)]^m dx,$$

$$\forall k\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq q,\ u_k=a_ke^k\times\int_k^{+\infty} e^{-x}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}[(x-1)(x-2)...(x-q)]^m dx,$$

$$\forall k\in\mathbb{N},\ 1\leq k\leq q,\ v_k=a_ke^k\times\int_0^{k} e^{-x}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}[(x-1)(x-2)...(x-q)]^m dx.$$

On remarque que : $A_m = u_0 + \sum_{k=1}^{q} u_k + \sum_{k=1}^{q} v_k$.

a) Montrer que u_0 est congru à $a_0 \times (-1)^{mq} \times (q!)^m$ modulo m.

b) Montrer que $\sum_{k=1}^{q} u_k$ est divisible par m.

c) On pose $\alpha = \underset{0 \le k \le q}{\text{Sup}} |a_k|$ et $M = \underset{0 \le x \le q}{\text{Sup}} |(x-1)(x-2)...(x-q)|$.

Montrer que : $\forall k \in \mathbf{N}$, $1 \le k \le q$, $|v_k| \le \alpha \times e^q \times \dfrac{(qM)^m}{(m-1)!}$.

En déduire qu'il existe deux réels K et L, indépendants de m tels que :

$$\left| \sum_{k=1}^{q} v_k \right| \le K \times \frac{L^m}{(m-1)!}.$$

Montrer alors que $\left| \sum_{k=1}^{q} v_k \right|$ tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini.

d) On suppose maintenant que $a_0 \neq 0$.

Montrer que pour m assez grand, m entier premier, A_m est non nul.

En déduire que le nombre e ne peut être racine d'un polynôme non nul à coefficients dans Z. On dit que e est un nombre réel transcendant.

EXERCICE 3

Soient (D) et (D') deux droites ~~perpendiculaires~~ orthogonales de l'espace et non situées dans un même plan (en d'autres termes non coplanaires).

La perpendiculaire commune (Δ) à ces deux droites rencontre la droite (D) au point A et la droite (D') au point A'. On note a la longueur du segment $[AA']$.

Une droite (d) rencontre la droite (D) au point B et la droite (D') au point B'. La parallèle à la droite (Δ) passant par le point B rencontre au point C la parallèle à la droite (D) passant par le point A'.

Soient M le milieu du segment $[BB']$, N le milieu du segment $[CB']$ et K le milieu du segment $[AA']$.

On suppose que la droite (d) varie de telle sorte que le segment $[BB']$ garde une longueur constante égale à λ, $\lambda > a$.

1° Préciser la nature des triangles $A'B'C$ et $BB'C$.

2° Montrer que le point N décrit un cercle dont on précisera le plan, le centre et le rayon.

3° Déterminer le lieu décrit par le point M.

4° Soient I, J, P et Q les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[A'B']$, $[AB']$ et $[A'B]$. Montrer que les droites (IJ), (KM) et (PQ) se rencontrent en un point O.

5° Déterminer le lieu des points O.

EXERCICE 4

1° Soit F l'application définie sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ par :

$$\forall (y,z)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ F(y,z)=(y\cos z, y\sin z).$$

a) Résoudre dans $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ l'équation $F(y,z)=(0,0)$.
L'application F est-elle injective ?

b) Montrer que l'application F est surjective.

c) En déduire la propriété suivante :

$$\forall (A,B,\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^4,\ \exists (C,\gamma)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \forall x\in\mathbf{R},\ A\cos(x-\alpha)+B\cos(x-\beta)=C\cos(x-\gamma).$$

2° Soit E l'espace vectoriel sur R des applications de classe C^∞ de R dans R.
Soit F la partie de E définie par :

$$\left(f\in F\right)\Leftrightarrow\left(\exists (u,v,a,b)\in\mathbf{R}^4,\ \forall x\in\mathbf{R}, f(x)=u\cos(x-a)+v\cos(2x-b)\right).$$

a) Utiliser 1°c) pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que les applications suivantes de E sont des éléments de F :

$$\forall x\in\mathbf{R},\ f_1(x)=\sin x,\ f_2(x)=\cos x,\ f_3(x)=\sin 2x,\ f_4(x)=\cos 2x.$$

c) Montrer que la famille (f_1,f_2,f_3,f_4) est une famille libre de F.

d) Déterminer une base de F.

3° Montrer que pour tout élément f de F, la dérivée f' est encore un élément de F.
En déduire que l'application D de F dans F définie par :

$$\forall f\in F,\ D(f)=f'$$

est un endomorphisme de F dont on déterminera la matrice dans la base déterminée à la question 2°d).